

UOT 517.984

**СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНОГО
БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА
НА ПОЛУОСИ С ПОТЕНЦИАЛОМ ДИРАКА****А.Г.ГЕЙДАРОВ, М.Н. МАМЕДОВ***Бакинский Государственный Университет*
arif_heydarov @ mail.ru

В работе доказана самосопряженность оператора $A = \frac{d^4}{dx^4} + \alpha \delta(x - x_0)$ в про-

странстве $L_2(0, +\infty)$. Показано, что предельный спектр оператора A совпадает с абсолютно непрерывной частью его спектра. Доказана интегральность резольвенты оператора A и получено явное выражение для интегрального ядра. Получено трансцендентное уравнение для определения отрицательных собственных значений оператора A .

Ключевые слова: бигармонический оператор, потенциал Дирака, самосопряженность, предельный спектр, собственное значение.

В данной работе проводится спектральный анализ одномерного бигармонического оператора $A = \frac{d^4}{dx^4} + \alpha \delta(x - x_0)$ в пространстве $L_2(0, +\infty)$,

где $\delta(x - x_0)$ - функция Дирака в точке $x_0 \in (0, +\infty)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ - вещественный параметр.

Доказана самосопряженность оператора A . Найден предельный спектр оператора A . Доказана интегральность резольвенты оператора A и получено представление для интегрального ядра. Получено трансцендентное уравнение для определения собственных значений оператора A .

Некоторые спектральные свойства одномерного бигармонического оператора на отрезке и на всей оси с потенциалами Дирака и ее производных, изучены в работах [1-4]. В отличие от этих работ, для определения оператора A мы используем обычное определение линейного оператора в

$L_2(0,+\infty)$, т.е. задаем область определения $D(A)$ и действие оператора A на функции $f \in D(A)$.

Обозначим через $D(A)$ множество функций

$$f \in W_2^4((0,+\infty) \setminus \{x_0\}) \cap W_2^2(0,+\infty),$$

удовлетворяющих условиям:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(x_0 + 0) = f''(x_0 - 0), \quad (1)$$

$$f'''(x_0 - 0) - f'''(x_0 + 0) = \alpha f(x_0). \quad (2)$$

Определим в пространстве $L_2(0,+\infty)$ оператор A :

$$A f = \frac{d^4 f}{d x^4} + \alpha \delta(x - x_0) \cdot f, \quad f \in D(A), \quad (3)$$

где $\frac{d^4 f}{d x^4}$ - обобщенная производная четвертого порядка функции f , а

произведение $\delta(x - x_0) \cdot f$ определяется известным равенством

$$\delta(x - x_0) \cdot f = f(x_0) \delta(x - x_0). \quad (4)$$

Оператор A является замкнутым симметрическим оператором в пространстве $L_2(0,+\infty)$.

1. Построение резольвенты оператора $A_0 = \frac{d^4}{dx^4}$ в пространстве $L_2(0,+\infty)$.

Построим резольвенту оператора $A_0 = \frac{d^4}{dx^4}$ в пространстве $L_2(0,+\infty)$ с областью определения

$$D(A_0) = \left\{ f \in W_2^4(0,+\infty) : f(0) = 0, \quad f'(0) = 0 \right\}.$$

Используем способ, изложенный в ([5], гл. XIII, с.317), где построена резольвента оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ в пространстве $L_2(0,2\pi)$. Применение этого способа несколько упрощает построения резольвенты оператора A_0 .

Пусть K - оператор, обратный $\frac{d^4}{dx^4} + \lambda^4$, ($\lambda > 0$) и заданный в пространстве $L_2(R)$, $R = (-\infty, +\infty)$. Обозначим $g = Kf$, $f \in L_2(R)$. Известно, что K - интегральный оператор в $L_2(R)$:

$$g(x) = (Kf)(x) = \frac{1}{2\lambda^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}|x-y|} \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}|x-y| + \frac{\pi}{4}\right) f(y) dy. \quad (5)$$

Пусть $K_0 = \left(\frac{d^4}{dx^4} + \lambda^4 \right)^{-1}$ в пространстве $L_2(0, +\infty)$. Функции Kf и K_0f являются решениями одного и того же дифференциального уравнения $\frac{d^4 u}{dx^4} + \lambda^4 u = f$ на $(0, +\infty)$. Поэтому их разность $v = K_0f - Kf$ удовлетворяет однородному уравнению $\frac{d^4 v}{dx^4} + \lambda^4 v = 0$. Отсюда из условия $v \in L_2(0, +\infty)$ получаем

$$K_0f = Kf + c_1 e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}x} \cos \frac{\lambda}{\sqrt{2}}x + c_2 e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}x} \sin \frac{\lambda}{\sqrt{2}}x. \quad (6)$$

Постоянные c_1 и c_2 следует выбирать такими, чтобы K_0f удовлетворяла граничным условиям:

$$(K_0f)(0) = 0, \quad (K_0f)'_x(0) = 0.$$

Из условия $(K_0f)(0) = 0$ получаем

$$c_1 = \frac{-1}{2\lambda^3} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}y} \sin \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}y + \frac{\pi}{4} \right) f(y) dy. \quad (7)$$

Вычислим производную $(K_0f)'_x$. Дифференцируя по x равенства (6) с учетом (5), после несложных преобразований, получаем

$$\begin{aligned} (K_0f)'_x &= \frac{-1}{2\lambda^2} \int_0^{+\infty} \operatorname{sgn}(x-y) \cdot e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}|x-y|} \sin \frac{\lambda}{\sqrt{2}}|x-y| \cdot f(y) dy - \\ &- \frac{\lambda}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}x} \left[c_1 \left(\cos \frac{\lambda}{\sqrt{2}}x + \sin \frac{\lambda}{\sqrt{2}}x \right) + c_2 \left(\sin \frac{\lambda}{\sqrt{2}}x - \cos \frac{\lambda}{\sqrt{2}}x \right) \right]. \end{aligned}$$

Из условия $(K_0f)'_x(0) = 0$ следует

$$\frac{1}{\sqrt{2}\lambda^3} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}y} \sin \frac{\lambda}{\sqrt{2}}y \cdot f(y) dy - c_1 + c_2 = 0.$$

Отсюда с учетом (7) находим постоянную c_2 :

$$c_2 = -\frac{1}{2\lambda^3} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}y} \sin \frac{\lambda}{\sqrt{2}}y \cdot f(y) dy - \frac{1}{\sqrt{2}\lambda^3} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}y} \sin \frac{\lambda}{\sqrt{2}}y \cdot f(y) dy.$$

Полагая в (6) найденные выражения для постоянных c_1 и c_2 , после несложных преобразований получаем

$$(K_0 f)(x) = \int_0^{+\infty} G(x, y; -\lambda^4) f(y) dy,$$

где

$$G(x, y; -\lambda^4) = \frac{1}{2\lambda^3} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}|x-y|} \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}|x-y| + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}\lambda^3} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(x+y)} \left[\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(x-y) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(x+y) - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (8)$$

2. Самосопряженность оператора A .

Пусть A - оператор, определенный равенством (3). В силу условий (1) и (2) оператор A является замкнутым симметрическим оператором в пространстве $L_2(0, +\infty)$.

Теорема 1. *Оператор A является самосопряженным оператором в пространстве $L_2(0, +\infty)$. Резольвента $R_z(A) = (A - zE)^{-1}$ оператора A является интегральным оператором в $L_2(0, +\infty)$ и интегральное ядро $K(x, y; z)$ при $z = -\lambda^4 \in \rho(A)$ имеет представление*

$$K(x, y; -\lambda^4) = G(x, y; -\lambda^4) - \frac{\alpha G(x, x_0; -\lambda^4)}{1 + \alpha G(x_0, x_0; -\lambda^4)} G(x_0, y; -\lambda^4), \quad (9)$$

где $G(x, y; -\lambda^4)$ имеет вид (8).

Доказательство. Так как A - замкнутый симметрический оператор, то для доказательства самосопряженности достаточно показать, что резольвентное множество этого оператора содержит вещественные числа ([6], следствие теоремы X.1).

Найдем резольвенту оператора A . С этой целью решаем в пространстве $L_2(0, +\infty)$ уравнение

$$\frac{d^4 f}{dx^4} + \alpha \delta(x - x_0) \cdot f + \lambda^4 f = g, \quad (\lambda > 0, g \in L_2(0, +\infty)). \quad (10)$$

Учитывая формулу (4), уравнение (10) запишем в следующем виде

$$\left(\frac{d^4}{dx^4} + \lambda^4 \right) f = g - \alpha f(x_0) \delta(x - x_0).$$

Применяя обратный оператор $\left(\frac{d^4}{dx^4} + \lambda^4 \right)^{-1}$ к обеим частям этого уравнения, получаем

$$f(x) = \int_0^{+\infty} G(x, y; -\lambda^4) g(y) dy - \alpha f(x_0) G(x, x_0; -\lambda^4). \quad (11)$$

Найдем величину $f(x_0)$. Положим $x = x_0$ в равенстве (11):

$$f(x_0) = \int_0^{+\infty} G(x_0, y; -\lambda^4) g(y) dy - \alpha f(x_0) G(x_0, x_0; -\lambda^4).$$

Отсюда находим

$$f(x_0) = \frac{1}{1 + \alpha G(x_0, x_0; -\lambda^4)} \int_0^{+\infty} G(x_0, y; -\lambda^4) g(y) dy.$$

Положим в (11) найденное выражение для $f(x_0)$ и обозначим

$$K(x, y; -\lambda^4) = G(x, y; -\lambda^4) - \frac{\alpha G(x, x_0; -\lambda^4)}{1 + \alpha G(x_0, x_0; -\lambda^4)} G(x_0, y; -\lambda^4).$$

Тогда

$$f(x) = \int_0^{+\infty} K(x, y; -\lambda^4) g(y) dy. \quad (12)$$

Уравнение $1 + \alpha G(x_0, x_0; -\lambda^4) = 0$ при $\alpha < 0$ имеет одно положительное решение $\lambda > 0$, а при $\alpha \geq 0$ решений не имеет (см. доказательство теоремы 2). Поэтому существуют числа $\lambda > 0$ такие, что $1 + \alpha G(x_0, x_0; -\lambda^4) \neq 0$. Для таких значений λ справедлива равномерная по $y \in (0, +\infty)$ оценка

$$\sup_{x \in (0, +\infty)} \int_0^{+\infty} |K(x, y; -\lambda^4)| dy = M(\lambda) < +\infty.$$

Отсюда из (12) получаем

$$\|f\|_{L_2} \leq M(\lambda) \|g\|_{L_2},$$

где $\|\cdot\|_{L_2}$ - норма в пространстве $L_2(0, +\infty)$. Следовательно, $f(x) = (A + \lambda^4)^{-1} g(x)$ и

$$R_{-\lambda^4}(A) g(x) = (A + \lambda^4)^{-1} g(x) = \int_0^{+\infty} K(x, y; -\lambda^4) g(y) dy. \quad (13)$$

Таким образом, резольвентное множество оператора A содержит вещественные числа и, поэтому A - самосопряженный оператор в пространстве $L_2(0, +\infty)$. Из (13) следует, что резольвента $R_z(A) = (A - zE)^{-1}$ оператора A является интегральным оператором в $L_2(0, +\infty)$ и интеграль-

ное ядро $K(x, y; z)$ при $z = -\lambda^4 \in \rho(A)$ имеет представление (9). Теорема доказана.

3. Спектр оператора A . Структура спектра оператора A описывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Предельный спектр оператора A совпадает с абсолютно непрерывной частью его спектра, причем*

$$\sigma_e(A) = \sigma_{ac}(A) = [0, +\infty). \quad (14)$$

Если $\alpha < 0$, то оператор A имеет одно отрицательное простое собственное значение. В случае $\alpha \geq 0$ оператор A не имеет собственных значений.

Доказательство. Равенства (14) доказываются с помощью стандартной методикой, обычно применяемой при исследовании таких задач. Применяются теорема Вейля о предельном (существенном) спектре ([5], теорема XIII. 14) и теорема о сохранении абсолютно непрерывных частей спектров возмущенных и невозмущенных операторов ([7], гл. X, теорема 42).

Очевидно, что если $1 + \alpha G(x_0, x_0; -\lambda^4) = 0$, то $-\lambda_0^4$ является отрицательным собственным значением оператора A . Поэтому исследуем уравнение

$$1 + \alpha G(x_0, x_0; -\lambda^4) = 0. \quad (15)$$

Учитывая, что

$$G(x_0, x_0; -\lambda^4) = \frac{1}{2\sqrt{2}\lambda^3} - \frac{1}{\sqrt{2}\lambda^3} e^{-\sqrt{2}\lambda x_0} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\lambda x_0 - \frac{\pi}{4}) \right],$$

уравнение (15) можно записать в следующем виде

$$2\sqrt{2}\lambda^3 + \alpha - \sqrt{2}\alpha e^{-\sqrt{2}\lambda x_0} \left[\sqrt{2} + \sin(\sqrt{2}\lambda x_0 - \frac{\pi}{4}) \right] = 0.$$

Обозначим $\sqrt{2}\lambda = \mu$. Тогда получаем уравнение

$$\mu^3 + \alpha - \alpha\sqrt{2} e^{-x_0\mu} \left[\sqrt{2} + \sin(x_0\mu - \frac{\pi}{4}) \right] = 0. \quad (16)$$

Исследуем это уравнение графическим способом.

Рассмотрим случай $\alpha < 0$. Обозначим

$$f(\mu) = \mu^3 + \alpha, \quad g(\mu) = \alpha\sqrt{2} e^{-x_0\mu} \left[\sqrt{2} + \sin(x_0\mu - \frac{\pi}{4}) \right].$$

Так как $f'(\mu) = 3\mu^2 > 0$, то $f(\mu)$ строго возрастает на $(0, \infty)$. Далее, в силу неравенства $f''(\mu) = 6\mu > 0$ при $\mu \in (0, \infty)$, функция $f(\mu)$ строго выпукла вниз. Вычисляем производную $g'(\mu)$:

$$g'(\mu) = 2\alpha x_0 e^{-x_0\mu} (-1 + \cos x_0\mu).$$

Очевидно, что $g'(\mu) \geq 0$ и $\mu_n = \frac{2\pi n}{x_0}$ ($n = 1, 2, \dots$), - точки перегиба функции $g(\mu)$. Поэтому $g(\mu)$ строго возрастает на $(0, +\infty)$. Далее, вычисляем производную второго порядка функции $g(\mu)$:

$$g''(\mu) = 2\alpha x_0^2 e^{-x_0\mu} \left[1 - \sqrt{2} \sin \left(x_0\mu + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Решая уравнения $1 - \sqrt{2} \sin \left(x_0\mu + \frac{\pi}{4} \right) = 0$, находим точки перегиба функции $g(\mu)$:

$$\mu_n = \frac{1}{x_0} \left[\frac{\pi}{4} ((-1)^n - 1) + \pi n \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$g''(\mu) > 0, \quad \mu \in \left(\frac{(4k-3)\pi}{2x_0}, \frac{2\pi k}{x_0} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

В этих интервалах функция $g(\mu)$ строго выпукла вниз. При $\mu \in \left(\frac{2\pi k}{x_0}, \frac{(4k+1)\pi}{2x_0} \right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ справедливо неравенство $g''(\mu) < 0$.

Поэтому в этих интервалах график функции $g(\mu)$ строго выпукла вверх.

Отметим, что график функции $f(\mu)$ пересекает ось абсцисс в точке $\mu = \sqrt[3]{|\alpha|}$, а функция $g(\mu) < 0$ при $\mu \in (0, +\infty)$. Отсюда из свойств функции $f(\mu)$ и $g(\mu)$ следует, что графики этих функций пересекаются только в одной точке $\mu_0 \in (0, \sqrt[3]{|\alpha|})$.

Таким образом, уравнение (15) имеет только одно положительное решение. В результате получаем, что при $\alpha < 0$ оператор A имеет только одно отрицательное собственное значение $-\lambda_0^4 = -\frac{\mu_0^4}{4}$. Нетрудно показать, что это собственное значение простое.

Очевидно, что в случае $\alpha \geq 0$ графики функций $f(\mu)$ и $g(\mu)$ не пересекаются. Поэтому в этом случае оператор A не имеет собственных значений. Теорема доказана.

Отметим, что применяя известные методы приближенного решения трансцендентных уравнений, можно найти собственные значения оператора A приближенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпешина Ю.Е., Павлов Б.С. Взаимодействие нулевого радиуса для бигармонического и полигармонического уравнений. Матем. заметки. 1986, т. 40, №1, с. 49-59.

2. Нейман-заде М.И., Шкаликов А.А. Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов. Матем. заметки. 1999. т. 66, №5, с.723-733.
3. Голощапова Н.И., Оридорога Л.Л. Дифференциальный оператор четвертого порядка с локальными точечными взаимодействиями. Укр. матем.вісник. 2007, т. 4, №3, с. 355-569.
4. Manko S.S. On spectral properties of the fourth order differential operator with singular coefficients. Mat. Stud. 2010, v.33, No2, p. 173-191.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т.4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. -428 с.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т.2. М.: Мир, 1978, 395 с.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М: Мир, 1972, 740 с.

DIRAK POTENSİALLI BİRÖLÇÜLÜ BİHARMONİK OPERATORUN YARIMOXDA SPEKTRAL ANALİZİ

A.H.HEYDƏROV, M.N.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Məqalədə $L_2(0,+\infty)$ fəzasında $A = \frac{d^4}{dx^4} + \alpha\delta(x-x_0)$ operatorunun öz-özünə qoşmalığı isbat edilmişdir.

Göstərilir ki, A operatorunun limit spektri, onun spektrinin mütləq kəsilməz hissəsi ilə üst-üstə düşür. A operatorunun rezolventasının inteqral operator olması isbat edilmişdir və inteqral nüvəsi üçün göstərilmiş tapılmışdır. A operatorunun məxsusi qiymətlərini təyin etmək üçün transendent tənlik alınmışdır və bu tənliyin həllinin varlığı araşdırılmışdır.

Açar sözlər: Biharmonik operatoru, Dirak potensialı, öz-özünə qoşmalılıq, limit spektr, məxsusi qiymət.

SPECTRAL ANALYSIS OF ONE DIMENSIONAL BİHARMONIC OPERATOR WITH DIRAC POTENTIAL ON HALF AXES

A.H.HEYDAROV, M.N.MAMMADOV

SUMMARY

In this paper, the selfadjointness of the operator $A = \frac{d^4}{dx^4} + \alpha\delta(x-x_0)$ in the space $L_2(0,+\infty)$ is proved. It is shown that the essential spectrum of the operator A coincides with the absolute continuous part of its spectrum.

Integrality of the resolvent of the operator A is proved and the precise expression of kernel is obtained. The transcendent equation for the definition of eigenvalues of operator A is also obtained and the existence of the solution of the equation is investigated.

Key words: Biharmonic operator, Dirac potential, self-adjointness, essential spectrum, eigenvalue.

Поступило в редакцию: 29.01.2014 г.

Подписано к печати: 04.04.2014 г.